УДК 517.9 ; 537.8
ББК 22.12

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА СИСТЕМ АВАРИЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Е.Н. Рыжов, О.Е. Григорьева

В статье в свете теории групп Ли предложены критерии разрешимости задач синтеза аварийной стабилизации. Данные критерии позволяют строить алгебры Ли для подобного класса задач.

Ключевые слова: *устойчивость, грубость, динамика, дублирующие режимы, алгебры Ли.*

Понятие грубости динамических систем (структурной устойчивости) было введено Л.С. Понтрягиным и А.А. Андроновым [5].

Негрубые системы, являясь весьма чувствительными к сколь угодно малым возмущениям, лежат на границах разбиения метрического пространства систем. Вследствие негрубости таких систем схемы численных методов их исследования являются неустойчивыми, так как при сколь угодно малых возмущениях фазовое пространство системы меняет свою топологическую структуру.

Нахождение в метрических пространствах динамических систем областей структурно-неустойчивой динамики имеет определенную ценность, в частности при анализе условий синтеза в различных задачах управления. Например, грубость модели в задачах управления является необходимым условием робастности [1] и как следствие – их физической осуществимости. В частности, определение множества управляющих параметров, на котором синтезируемая система обладает структурно неустойчивой динамикой, позволяет исследовать проблему алгоритмической разрешимости задач синтеза, а также выделить области, где происходит срыв с желаемых режимов. Вследствие структурной неустойчивости в этих областях численные алгоритмы, например, не обладают устойчивостью.

Динамическая система представляет по определению однопараметрическую группу преобразований фазового пространства. Векторное поле динамической системы порождает поток на R^n. Известно, что поток обладает групповыми свойствами (см. например [3]). Под действием потока нули векторного поля остаются на месте, другие же точки заметают кривые в R^n.

Такое рассмотрение, позволяет перейти к исследованию операторов данной группы, определяющих динамическую систему.

В статье [2], были получены достаточные условия наличия вырожденных состояний равновесия.

В данной работе доказано, что причиной структурной неустойчивости является то, что множество состояний равновесия одного из коммутирующих векторных полей, содержит кривую равновесия.

На основании этого результата получен достаточный признак существования структурно-неустойчивой динамики для систем дифференциальных уравнений. Основной подход к тестированию систем на предмет структурной неустойчивости на алгебрах Ли в данной работе опирается на выборе тестового векторного поля удовлетворяющего условию грубости.

Динамические системы как потоки, их векторные поля и алгебры Ли

Рассмотрим в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ множество n-мерных гладких векторных полей

$$\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), ..., \xi_n(x))^T, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)^T \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния системы, $\xi(\mathbf{x})$– вектор-функция, определенная и непрерывная на R^n, удовлетворяющая условиям Липшица по $\boldsymbol{x}$ в любой ограниченной области пространства R^n и r-гладкая на $x_i \in (-\infty, +\infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$ при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Векторное поле $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_n(x))$ – касательное к фазовым траекториям пространства состояний. Оператор векторного поля ξ

$$L_\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2}$$

является оператором группы преобразований фазового пространства R^n, где компоненты касательных векторов $\xi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – коэффициенты оператора (2) гладко зависят от точек пространства R^n, согласно сделанным выше предположениям. Соответственно в точках равновесия векторного поля (нулях векторного поля) коэффициенты оператора обращаются в ноль.

Множество нулей векторного поля, положений равновесия потоков далее будем обозначать как $\Omega(...)$ – систему уравнений, соответствующую векторному полю ξ как $\boldsymbol{S}_\xi$. Напомним, что нуль векторного поля гиперболичен, если спектр матрицы линеаризации векторного поля целиком лежит вне мнимой оси.

Заметим, что векторное поле, согласно приведенным выше свойствам, однозначно определяет гладкую динамическую систему, и порождает поток, т.е. однопараметрическую группу диффеоморфизмов φ^t на $\boldsymbol{R}^n$: $\varphi^t : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \mapsto \boldsymbol{R}^n$, $\varphi(t, x) = \varphi^t x$, где $t \in \boldsymbol{R}$. Отображение полагаем бесконечно дифференцируемым. Орбиты потока определены при $t \in (-\infty, +\infty)$. Положения равновесия потока тогда определены как $\varphi^t \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Орбиты потока являются траекториями системы. Нули векторного поля являются точками покоя потока, порождаемого соответствующим векторным полем.

При принимаемых предположениях в отношении свойств векторных полей (1) интегральные кривые, определяющие поток, ограничены на замкнутой области пространства R^n и неограниченно продолжаемы при $t \in \boldsymbol{R}$. Достаточные условия существования таких решений можно найти в работах Н.П. Еругина, В.И. Зубова, В.И. Арнольда и др.

Далее рассмотрим в некоторой области евклидового пространства R^n множество r-гладких векторных полей.

Построим на множестве операторов этих полей векторное пространство над полем вещественных чисел. Далее, введем на полученном пространстве скобку Ли обычным образом: $\left[L_\xi, L_\eta\right] = L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi$.

В координатной записи скобка Ли операторов принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(L_\xi\big(\eta_i(x_1, x_2 \dots, x_n)\big) - L_\eta\big(\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) \Big) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{3}$$

где $L_\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, x_2 \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$, $L_\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$

Скобка Ли определяет координатную запись нового векторного поля [4]

$$\psi = \big(\xi(\eta_1) - \eta_1(\xi), \xi(\eta_2) - \eta_2(\xi), \dots, \xi(\eta_n) - \eta_n(\xi)\big),$$

соответственно его оператор имеет вид

$$L_\psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\eta_i) - \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi_i) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тогда получаем по построению алгебру Ли векторных полей $\boldsymbol{L}$ над полем вещественных чисел, где в качестве операции умножения взята скобка Ли $[\xi, \eta]$ соответствующих операторов векторных полей.

2. Достаточные условия существования структурно-неустойчивой динамики на алгебрах Ли

Имеет место следующая лемма [2].

Лемма. Пусть ξ, η – n-мерные гладкие коммутирующие элементы алгебры Ли, причем, множество нулей $\Omega(\eta)$ элемента η состоит из гиперболических точек. Тогда $\Omega(\eta) \subseteq \Omega(\xi)$, где $\Omega(\xi)$ – множество нулей векторного поля ξ.

Теорема 1. Пусть ϑ, θ – n-мерные гладкие элементы алгебры L, один из них лежит в центре алгебры и множество $\Omega(\vartheta)\backslash\Omega(\theta)\neq\varnothing$. Тогда, элемент ϑ не является грубым.

Доказательство теоремы 1. Доказательство от противного.

В частности, из теоремы 1 следует, что композицию потоков, порождаемых векторными полями и подчиненных условиям теоремы 1, определяет поток со структурно-неустойчивой динамикой.

Следствие теоремы 1. Пусть в центре алгебры Ли лежит грубый n-мерный гладкий элемент θ, и его множество нулей непустое. Тогда для всякого негрубого n-мерного элемента ϑ алгебры Ли выполняется включение $\Omega(\theta)\subseteq\Omega(\vartheta)$.

Теорема 2. Пусть ϑ, θ n-мерные коммутирующие гладкие элементы алгебры Ли, для критических множеств которых выполнено:

1) множество $\Omega(\vartheta)\backslash\Omega(\theta)$ непустое,

2) элемент θ грубый и множество его нулей состоит из одной точки. Тогда множество $\Omega(\vartheta)$ содержит континуум нулей.

Следующая теорема формулируется как достаточный признак существования структурно неустойчивой динамики.

Теорема 3. Для того, чтобы гладкая динамическая система (1) – S_ϑ имела структурно-неустойчивый режим достаточно выполнение условий:

1) ее векторное поле ϑ коммутирует с некоторым грубым векторным полем θ, множество нулей которого непустое;

2) система, определяющая векторное поле ϑ имеет хотя бы одно состояние равновесия, несовпадающее с каким либо из нулей векторного поля θ.

Доказательство теоремы 3. Согласно утверждениям теоремы 2 и условий 1, 2 теоремы 3, следует, что множество $\Omega(\vartheta)\backslash\Omega(\theta)$ непустое, и множество состояний равновесия динамической системы содержит ноль векторного поля, а так же кривую равновесия, проходящую через него. Таким образом, линеаризация системы будет вырожденна вдоль данной кривой , что является признаком существования структурно-неустойчивых режимов исследуемой системы в окрестности этой кривой. Теорема 3 доказана.

Приведем пример, иллюстрирующий доказанный достаточный признак.

Пример. Рассмотрим векторное поле (1) $\vartheta=(-x_1^2x_2,\ x_1x_2^2)$ при n=2. Оператор группы преобразования, порождаемой этой системой, тогда имеет вид: $L_\vartheta=-x_1^2x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}$. Требуется исследовать систему на наличие структурно неустойчивой динамики.

В частности, точки (0,0) и (0,1) являются состояниями равновесия $\vartheta=(-x_1^2x_2,\ x_1x_2^2)$ (нулями векторного поля). Далее найдем грубое векторное поле, коммутирующее с векторным полем системы.

Для чего введем следующее множество пробных векторных полей: $\theta=(\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2,\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2)$. Вычисляя скобку Ли

$$[L_\vartheta, L_\theta]=(-\alpha_{21}x_1^3-(\alpha_{11}+\alpha_{22})x_1^2-3\alpha_{12}x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$+(\alpha_{12}x_2^3+(\alpha_{11}+\alpha_{22})x_2^2x_1+3\alpha_{12}x_1^2x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x_1^3, x_2^3, x_1^2x_2, x_2, x_2^2$ нулю, получаем систему определяющих уравнений на коэффициенты:

$$\begin{cases}\alpha_{12}=\alpha_{21}=0\\ \alpha_{11}+\alpha_{22}=0\end{cases}$$

Таким полем является, например, векторное поле $\theta=(-x_1,\ x_2)$. Соответствующий оператор, выбранного поля имеет вид:

$$L_\theta=-x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Спектр линейного поля θ имеет ненулевую вещественную часть, следовательно, векторное поле гиперболично и, следовательно, грубое. Причем тестируемая система имеет, в частности, состояние равновесия (0,1), отличное от единственного нуля векторного поля .

Таким образом, условия достаточного признака существования структурно-неустойчивой динамики выполняются. Действительно, кроме состояния равновесия (0,1) исследуемой системы множество нулей векторного поля (множество состояний равновесия соответствующей системы) состоит из двух координатных осей, включая начало координат. Таким образом, множество нулей векторного поля ϑ содержит континуум, проходящий через начало координат, в то время как множество нулей поля θ состоит лишь из изолированного начала координат.

Данный подход особенно эффективен для исследования многомерных систем при n>2 , так как не требует явного нахождения всех состояний равновесия исследуемой системы. Кроме того, в случае многопараметрических систем, алгоритм позволяет выделить «опасные» области в пространстве параметров при которых происходят срывы динамики с желаемых режимов.

3. О неразрешимости задачи аварийной стабилизации на абелевых алгебрах Ли

Рассмотрим математическую модель динамического процесса, состоящую из совокупности элементарных звеньев [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(\gamma)x + u \\ u = B(x) \end{cases}, \qquad (4)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – n-мерный вектор состояния;

$U = B(x)$ – n-мерный вектор выходных переменных регулятора;

$B(X) = (b_1(x),\ b_2(x), \ldots,\ b_n(x))^T$, матрица A(g) рассматривается на интервалах параметра g, где она имеет ненулевой вещественный спектр.

Дублирующие состояния вводятся на случай сбоя в работе устройства. Работа систем с дублирующими состояниями равновесия опирается на следующий принцип действия обратной связи.

При формировании контура положительной обратной связи в окрестности состояния равновесия параметр γ приобретает смысл параметра накачки энергии. Спектр матрицы $A(\gamma)$ при фиксированном параметре γ уже имеет положительные элементы $Re\lambda_i$ ($\gamma > 0$), то есть положение равновесия становится неустойчивым. В этом случае требуется, чтобы дублирующее состояние системы становилось устойчивым и притягивало траектории системы при срыве динамики с основного стационарного режима.

Таким образом, требуется синтезировать обратную связь по состоянию объекта регулирования, такую, что траектории системы, начинающиеся в некоторой окрестности состояния равновесия $\mathbf{0} = (0, \ldots ,0)^T$, стабилизировались в окрестности состояния равновесия $\bar{x} \neq 0$. Ясно, что получаемая система должна быть нелинейной вследствие появления дублирующего состояния равновесия.

Теорема 4. Задача аварийной стабилизации системы (4) неразрешима на абелевых алгебрах Ли.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим задачу синтеза стабилизирующей обратной связи в окрестности заданного положения равновесия $\bar{x} \neq 0$ на абелевой алгебре Ли. Оператор векторного поля исходной системы, векторного поля обратной связи по состоянию и синтезируемой системы имеют соответственно вид:

$$\mathrm{L_a} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\mathrm{n}} a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad L_b = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\mathrm{L}_{a+b} = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{\mathrm{n}} a_{ij}x_j\right) + b_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

Пусть согласно задаче синтеза, функция обратной связи U такая, что система (4) имеет в качестве состояния равновесия точку $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$. Помимо этого равновесия синтезированная система, по условию задачи стабилизации должна иметь также состояние равновесия, которая активизируется как устойчивая, в случае когда $\mathrm{Re}\lambda_i(\gamma)$ становится положительной в точке , т.е. когда точка $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ становится неустойчивой.

В произвольной окрестности состояния равновесия $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ система $\dfrac{\mathbf{dx}}{\mathbf{d}t} = \mathbf{Ax}$ – грубая (вещественная часть спектра матрицы $\boldsymbol{A}$ ненулевая).

Вследствие коммутативности элементов алгебры имеем, [a,b]=**0**,[a,a]=**0** где **[...]** – скобка Ли. Произведение векторных полей определенное скобкой Ли является билинейной операцией, следовательно, [a=b,b]=**0**.

Тогда из достаточного признака существования структурно-неустойчивой динамики (теорема 3) следует, что синтезированная система структурно неустойчива, следовательно, она не является робастной [1]. В частности, существует окрестность состояния $\bar{x} \neq 0$, содержащее кривую равновесия, проходящую через это состояние. Теорема 4 доказана.

Из последнего утверждения следует, что невозможно предложить устойчивую численную схему алгоритма стабилизации для систем с дублирующими состояниями равновесия на абелевых алгебрах Ли.

Коммутационная таблица алгебры Ли

	$u^1(\mathbf{x})$	$u^2(\mathbf{x})$	$g(\mathbf{x})$
$u^1(\mathbf{x})$	**0**	**0**	$\gamma u^1(\mathbf{x})$
$u^2(\mathbf{x})$	**0**	**0**	$\gamma u^2(\mathbf{x})$
$g(\mathbf{x})$	$-\gamma u^1(\mathbf{x})$	$-\gamma u^2(\mathbf{x})$	**0**

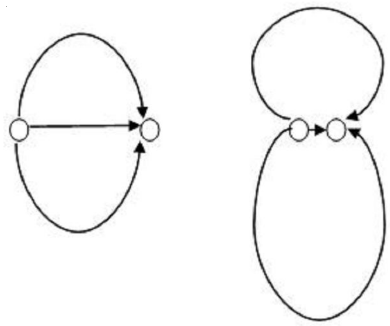
Решение задачи с дублирующими состояниями равновесия на некоммутативной алгебре Ли приведено в работе [6]. Здесь $\mathbf{L}^{[1]}=[\mathbf{L},\mathbf{L}]\subset\mathbf{L}$ множество всех коммутаторов алгебры Ли. Алгоритм построения такой алгебры приведен в том же источнике [6] на множестве квадратичных векторных полей и векторного поля свободного движения пары апериодических звеньев, где

$$g(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$u^1(\mathbf{x}) = \left(-\mu_2 x_1^2 + \mu_1 \mu_2 b_{21}^{-1} x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} - 2\mu_2 x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$u^2(\mathbf{x}) = -2\mu_1 x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(b_{21} x_1^2 - \mu_1 x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$ – образующие алгебры Ли: операторные представления векторного поля свободного движения пары апериодических звеньев, векторных полей обратных связей по вектору состояния систем, соответственно. Линейные оболочки $\mathrm{Lin}_{OX_1}\left(u^1(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\right)$, $\mathrm{Lin}_{OX_2}\left(u^2(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\right)$, $\mathrm{Lin}_{OX_1 \times OX_2}\left(u^i(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\right)$ содержат векторные поля систем аварийной стабилизации с назначенными запасными точками стабилизации, лежащими на осях OX_1 и OX_2 на фазовом пространстве нелинейно взаимодействующих апериодических звеньев, соответственно при всех ненулевых наборах коэффициентов линейных комбинаций образующих алгебры Ли.

Таким образом, задача синтеза моделей на алгебре Ли, определяемой коммутационной таблицей, дает решение задачи аварийной стабилизации в классе квадратичных обратных связей. Модуль структурной константы алгебры Ли равен расстоянию от проектного устойчивого режима до точки запасной стабилизации.



Механизм формирования динамики
при аварийной стабилизации

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматическое управление. Теория // Машиностроение : энциклопедия / Е. А. Федосов [и др.] ; под общ. ред. Е. А. Федосова. – М. : Машиностроение, 2000. – В 40 т. Т. 1. – 688 с.

2. Гордов, Е. П. Коммутирующие векторные поля и особые гиперболические точки / Е. П. Гордов, Е. Н. Рыжов // Известия вузов. Серия «Физика». – 1994. – № 10. – С. 117–118.

3. Зубов, В. И. Устойчивость движения / В. И. Зубов. – М. : Высш. шк., 1973. – 272 с.

4. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

5. Понтрягин, Л. С. Избранные научные труды / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1988. – В 3 т. Т. 2. – 540 с.

6. Рыжов, Е. Н. Задачи аварийной стабилизации и алгебры Ли / Е. Н. Рыжов // Современные железные дороги: достижения, проблемы, образование : межвуз. сб. науч. ст. / Моск. гос. ун-т путей сообщения (МИИТ), Волгогр. фил. – Волгоград, 2009. – Вып. 2. – С. 230–234.

ALGEBRAIC RESOLVE CONDITIONS OF STABILITY IN PROBLEMS OF WRECK REGIMES SYNTHESIS

E.N. Ryzhov, O.E. Grigoryeva

New approach to the problem of stabilization is proposed. Lee algebras are used to prove resolve conditions of stability in problems of double wreck regimes synthesis.

Key words: *dynamics, stability, synthesis, double wreck regimes, Lee algebra.*