



УДК 517.9; 537.8
ББК 22.12

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ

А.С. Горобцов, Е.Н. Рыжов

В работе, на основе теории устойчивости инвариантных множеств В.И. Зубова, получены новые схемы синтеза систем с виброизолированными областями движения. Сформулированы принципы нелинейной виброзащиты.

Ключевые слова: устойчивость, автоколебательный режим, инвариантность, принцип суперпозиции решений, нелинейная виброзащита.

Основной из актуальных задач при проектировании систем управления является проблема корректного сопряжения генератора как источника питания и исполнительных органов. При этом привод от источника питания к исполнительной части устройства должен, кроме того, сглаживать вибрации от генератора, которые искажают требуемую динамику движения исполнительных органов. Решение этой проблемы является задачей виброизоляции или виброзащитности пространства состояний исполнительной части устройства. В случае представления задач в виде линейных систем дифференциальных уравнений, решение проблемы опирается на принцип суперпозиции математической модели свободного движения управляющего объекта и управления с обратной связью. В случае нелинейного регулятора принцип суперпозиции решений, как известно, неприменим [2]. Колебательные системы с неидеальным источником энергии можно представлять как систему автономных динамических систем, содержащих подсистемы источника питания, связанных с колебательными системами, вообще говоря, нелинейными обратными связями по полному вектору состояния всей системы в целом. Термин «неидеальный источник» обязан своим происхождением именно формированию контуров нелинейных обратных связей между

колебательными подсистемами и источником энергии. При этом поведение колебательных подсистем влияет на динамические характеристики источника. В свою очередь изменение характеристик источника питания влияет на поведение колебательных подсистем.

В данной статье подход к виброизоляции опирается на теорию устойчивости инвариантных множеств, построенной В.И. Зубовым [3].

Схема синтеза

Введем функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, поверхности уровня которой являются односвязными и замкнутыми. Следуя работе [там же], запишем условие инвариантности для одной из поверхностей уровня функции $F(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$: $\sum_{i=1}^n \left(\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \dot{x}_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \right) (F(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x})(C - F(\mathbf{x}))$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ удовлетворяет уравнению $F(\mathbf{x}) = C$.

При этом, если положить, что $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n P_{2i} x_{2i}^2$, где $P_{2i} > 0$ – константы и $F(\mathbf{x})$ определено положительно, то и ее полная производная на движениях системы в области $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2n} \mid F(\mathbf{x}) < C\}$ будет определено положительной функцией, в области $\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2n} \mid F(\mathbf{x}) > C\}$ – определено отрицательной, то есть $F(\mathbf{x})$ – функция Ляпунова. Так как поверхность уровня $F(\mathbf{x}) = C$,

помимо всего прочего, является инвариантной, то при выполнении условий существования решений задачи Коши и их единственности следует, что траектории, лежащие внутри области фазового пространства, ограниченной этой поверхностью, и вне нее, не могут ее пересекать.

Если данная схема синтеза удовлетворяет теоремам Зубова [3], то задача синтеза имеет положительное решение.

1. Постановка задачи стабилизации произвольного числа свободных апериодических движений

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{Y}} + \Omega \mathbf{Y} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{U}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}, \\ \ddot{y}_n - \alpha_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n + u_n(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}) = 0, \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i^2(t)}{a_i^2} + \frac{\dot{y}_i^2(t)}{b_i^2} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1, \end{cases}$$

Будем искать такое управление с обратной связью, чтобы полная производная функции на движениях системы являлась полиномом четвертой степени по переменным состояния. Поэтому представляется целесообразным искать компоненты, стабилизирующие управление, в виде кубических полиномов:

$$u_i(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}}) = \beta_{2i,2i-1} \dot{y}_i y_i^2 + \beta_{2i,2i} \ddot{y}_i y_i + \sum_{j=1}^n \beta_{2i,2j-1} \dot{y}_i y_j^2 + \sum_{j=1}^n \beta_{2i,2j} \ddot{y}_i y_j,$$

где $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $\dot{\mathbf{Y}} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n)^T$, $\ddot{\mathbf{Y}} = (\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_n)^T$ – вектор состояния, скоростей и ускорений системы соответственно, вектор-функция $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})^T$ – искомое стабилизирующее управление с обратной связью. Подсистема с номером n является искомым источником питания. Матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$ – диагональные; $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов положительной обратной связи, определяющая неустойчивость процессов при отсутствии управления, где $\mathcal{G}_i^2 = \mu_i^2$, при $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\mathcal{G}_i^2 = \omega_n^2$.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \mathcal{G}_i^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{G}_i^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\alpha_i & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \end{pmatrix}$$

Решение задачи опирается на следующую теорему.

Теорема [1]. Пусть будут выполнены условия: 1) система состоит из неидеального источника питания и $n-1$ двойных апериодических звеньев; 2) коэффициенты $\mathbf{U}$ управления с обратной связью по вектору состояния системы $(\cdot)$ удовлетворяют следующим соотношениям: а) коэффициенты контурного управления: $\beta_{2i,2i-1} = \frac{\alpha_i}{a_i^2}$, $\beta_{2i,2i} = \frac{\alpha_i}{b_i^2}$; б) соотношения для коэффициентов обменных управлений $\frac{2\beta_{2i,2j}}{b_i^2} + \frac{2\beta_{2j,2i}}{b_j^2} + \frac{P_{2i}}{b_j^2} + \frac{P_{2j}}{b_i^2} = 0$, $P_{2i} = \frac{2\alpha_i}{b_i^2}$, $P_{2j} = \frac{2\alpha_j}{b_j^2}$, $\beta_{2i,2j-1} = \frac{\alpha_i}{a_j^2}$; в) $b_i^2 = \mathcal{G}_i^2 a_i^2$, где $i, j = 1, 2, \dots, n$ при $i \neq j$; 3) в неидеальном источнике устанавливается автоколебательный режим с амплитудой, равной величине полуоси эллипсоида a_n .

Тогда условия 1)–3) являются необходимыми и достаточными для стабилизации $n-1$ апериодических звеньев в их пространствах состояний.

Таким образом, с учетом апериодичности группы процессов $\alpha_i^2 > 4\mu_i^2$, при $i = 1, 2, \dots, n-1$ следующие условия являются достаточными для стабилизации $n-1$ апериодических звеньев в их пространствах состояний: система состоит из неидеального источника питания и $n-1$ двойных апериодических звеньев; коэффициенты $\mathbf{U}$ управления с обратной связью по вектору состояния системы удовлетворяют соотношениям: коэффициенты контурного управления: $\beta_{2i,2i-1} = \frac{\alpha_i}{a_i^2}$, $\beta_{2i,2i} = \frac{\alpha_i}{b_i^2}$; соотношения для коэффициентов обменных управлений $\beta_{2i,2j} = -\frac{\alpha_i b_i^2 + \alpha_j b_j^2}{b_i^2 + b_j^2}$, $\beta_{2i,2j} = \beta_{2j,2i}$, $\beta_{2i,2j-1} = \frac{\alpha_i}{a_j^2}$, где $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathcal{G}_j^2 = \mu_j^2$, $b_i^2 = \mathcal{G}_i^2 a_i^2$, $j = 1, 2, \dots, n$ при $i \neq j$. При выполнении этих условий в неидеальном источнике устанавливается автоколебательный режим с амплитудой, равной величине полуоси эллипсоида a_n .

В частности, если в неидеальном источнике устанавливается автоколебательный режим с амплитудой меньшей величины полуоси a_n эллипсоида, тогда, по крайней мере в пространстве состояний одного из апериодических звеньев, возникают режимы вибраций в окрестности статического режима, звено теряет апериодичность и выходит на автоколебательный режим [1].

Отсюда вытекают два принципа виброизоляции процессов стабилизации аperiodических звеньев, в случае, когда амплитуда установившегося процесса в источнике питания меньше a_n .

1. Для того чтобы обеспечить виброизоляцию процессов стабилизации, достаточно ввести дополнительное аperiodическое звено, движения которого поглощают вибрации, вызванные работой неидеального источника питания.

2. Для обеспечения виброизоляции процессов стабилизации достаточно, чтобы неидеальный источник питания являлся двухконтурным. Причем оба контура должны быть колебательными.

2. Алгоритм нелинейного поглощения вибраций

В случае устройства, работающего на двух колебательных звеньях, в пространстве исполнительного органа происходит демпфирование колебаний. Если динамика исполнительного органа описывается аperiodическим звеном второго порядка, то установление автоколебательного режима в пространстве состояний управляющего колебательного контура определяет стабилизацию исполнительного органа в статическом режиме. Не теряя общности рассуждений, полагаем, что статический режим в пространстве исполнительного органа совмещен с началом координат. Заметим, что решение нелинейной задачи ста-

билизации аperiodического звена второго порядка посредством автогенератора эквивалентно задаче стабилизации двух аperiodических звеньев первого порядка при выходе управляющего контура на режим генерации устойчивого автоколебательного процесса. Таким образом, приходим к следующей постановке задачи:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 - \alpha_1 \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 + u_1(y_1, \dot{y}_1) + u_{12}(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = 0, \\ \ddot{y}_2 - \alpha_2 \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 + u_2(y_2, \dot{y}_2) + u_{21}(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = 0, \\ \sum_{i=1}^2 \left(\frac{y_i^2(t)}{a_i^2} + \frac{\dot{y}_i^2(t)}{b_i^2} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0, \quad \omega_1 = \omega_0. \end{cases}$$

Согласно полученным достаточным условиям стабилизации, для амплитуды источника следует положить $a_1^2 = Z_1^2$, тогда, полагая $\beta_{24} = \beta_{42}$, получаем следующий расчет параметров синтеза.

1. Коэффициенты в уравнении движения исполнительного звена – $\beta_{41} = \alpha_{44} Z_1^{-2}$, $\beta_{43} = \alpha_{44} a_2^{-2}$, $\beta_{44} = \frac{\alpha_{44}}{\omega_2^2 a_2^2}$.

2. Коэффициенты для формирования контура обратной связи для обмена сигналами между неидеальным источником и исполнительным органом – $\beta_{24} = \frac{\alpha_{22} + \alpha_{44}}{\omega_1^2 Z_1^2 + \omega_2^2 a_2^2}$, $\beta_{42} = \beta_{24}$.

Численное моделирование представлено на рис. 1 (движение аperiodического звена), рис. 1, 2 (выход источника питания на автоколебательный режим). В случае если амплитуда автоколебательного процесса источника питания не выходит на величину, равную полуоси эллипса, исполнительное звено начинает вибрировать (рис. 3, 4).

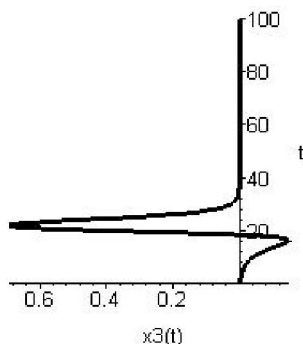


Рис. 1

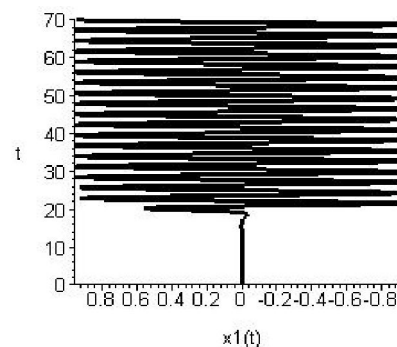


Рис. 2

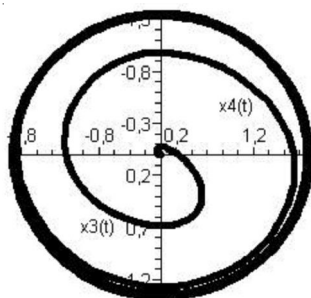


Рис. 3

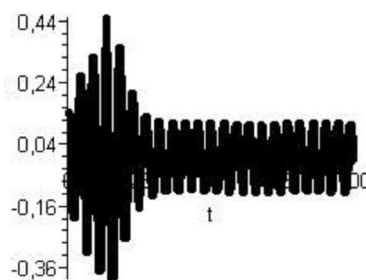


Рис. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горобцов, А. С. Задачи нелинейной стабилизации и аналитический синтез режимов движения многомерных динамических систем / А. С. Горобцов, Е. Н. Рыжов. – Волгоград, ВолгГТУ, 2008. – 176 с.

2. Гудвин, Г. К. Проектирование систем управления / Г. К. Гудвин, С. Ф. Гребе, М. А. Сальгадо. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2004. – 911 с., ил.

3. Zubov, V. I. Устойчивость движения / В. И. Зубов. – М. : Высш. шк., 1973. – 272 с.

ABOUT MATHEMATICAL PRINCIPLES OF VIBROPROTECTION DOMAINS CONSTRUCTING

A.S. Gorobtsov, E.N. Ryzhov

Synthesys scheme of aperiodic links is proposed. Nonlinear vibroprotection principles based on V.I. Zubov's theory of invariant sets are formulated in the paper.

Key words: *invariant manifold, generator, aperiodic link, principle of superposition of decisions, nonlinear vibroprotection.*