



## ИННОВАЦИИ В БИОТЕХНОЛОГИЯХ

---

---

DOI: <https://doi.org/10.15688/NBIT.jvolsu.2021.1.6>

УДК 519.6

ББК 22.19

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ ПО ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЕ

**Сергей Германович Сучков**

Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,  
Директор научно-технологического центра «Микро- и нанoeлектроника»,  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
[suchkov.s.g@mail.ru](mailto:suchkov.s.g@mail.ru)  
ул. Астраханская, 83, 410012 г. Саратов, Российская Федерация

**Дмитрий Сергеевич Сучков**

Доктор физико-математических наук, заместитель директора НИИ механики и физики,  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
[suchkovds@ya.ru](mailto:suchkovds@ya.ru)  
ул. Астраханская, 83, 410012 г. Саратов, Российская Федерация

**Светлана Михайловна Сучкова**

Инженер ООО «Конверсия-СГУ»  
[svetlana.m.suchkova@ya.ru](mailto:svetlana.m.suchkova@ya.ru)  
ул. Московская, 66, 410012 г. Саратов, Российская Федерация

**Аннотация.** Предложена феноменологическая модель математического описания практически важных изменений пульсовой волны между нормой и патологией. Полученные результаты свидетельствуют о существенно нелинейном по давлению характере трансформации пульсовой волны в области манжетки.

**Ключевые слова:** пульсовая волна, феноменологическая модель, кровеносные сосуды, уравнения гидродинамики, математическое моделирование.

Пульсовая волна представляет собой сложное совместное движение крови и стенок сосудов, описываемое нелинейной системой дифференциальных уравнений гидродинамики и теории упругости с подвижной границей. Даже приближенное решение такой задачи в настоящее время не представляется возможным без существенных упрощений, сводящих задачу к практически не интересным случаям. Поэтому для математического описания практически важных изменений пульсовой волны между нормой и патологией и выявления основных физических параметров, характеризующих патологию, необходимо построить феноменологическую модель, параметры которой определяются из сравнения с экспериментом.

Для скорости пульсовой волны воспользуемся известной эмпирической формулой [1–4]:

$$V = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $h$  – толщина,  $\rho$  – плотность стенки сосуда,  $d$  – диаметр кровеносного сосуда.

При наложении манжетки на область бицепса прохождение пульсовой волны, как и любой другой, через конечную по размерам неоднородность (длиной  $L_m$ ) сопровождается возникновением отраженных волн от начала и конца манжетки. Датчик давления находится в середине манжетки, поэтому на него приходит прошедшая первую границу манжетки волна и волна, отраженная от второй границы манжетки. Следующие отражения не будем учитывать ввиду малости их амплитуды. Будем считать, что

под манжеткой уменьшается диаметр сосудов. Тогда под манжеткой скорость волны увеличивается и от границ манжетки происходит отражение вследствие скачка акустического импеданса  $\rho V$ . Кроме того, возникает топографическая неоднородность вследствие скачка диаметра сосудов под манжеткой, что также вызывает отражение, зависящее от отношения размера неоднородности и длины волны.

Импульс пульсовой волны  $P(t)$  имеет спектр частот:

$$S_p(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} P(t) \cos(2\pi ft) dt, \quad (2)$$

показанный на рисунке 2а для нормы, а на рисунке 2б при патологии.

Из рисунков 1б и 2б видно, что при патологии возникают высокочастотные осцилляции пульсовой волны. Для их описания можно предположить, что, по-видимому, при падении пульсовой волны на участок сосуда, пережатый манжеткой, возбуждаются колебания стенок сосуда. Поэтому предположим, что диаметр сосуда перед манжеткой  $d_1$ , зависит от давления в виде:

$$d_1(t) = d_{10} \{1 + k_1 [1 + k_{vib} \sin(2\pi f_{vib} t)] P(t)\}, \quad (3)$$

а под манжеткой  $d_2$  и после манжетки  $d_3$  в виде:

$$d_i(t) = d_{i0} (1 + k_i P(t)) \quad (i = 2, 3), \quad (4)$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_{vib}, d_{10}, d_{20}, d_{30}, f_{vib}$  – феноменологические параметры в соответствующих областях,

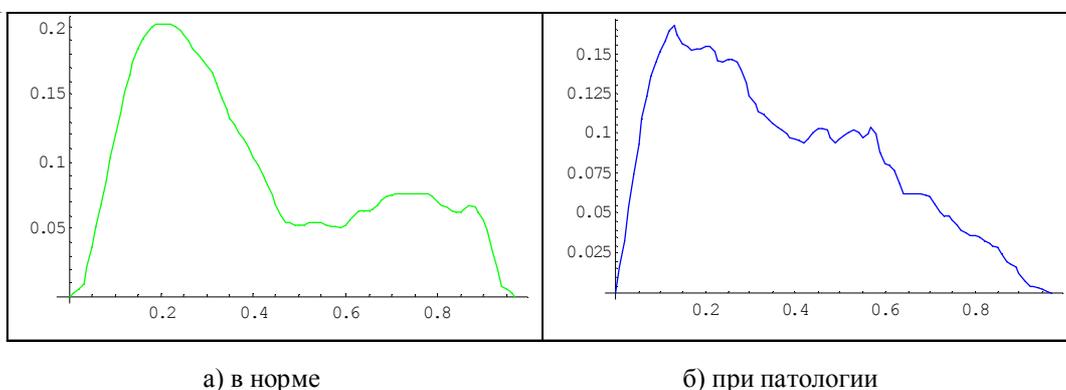


Рис. 1. Форма импульса пульсовой волны

$P(t)$  – давление в пульсовой волне. Предположим также, что модуль упругости стенки сосуда зависит от диаметра и для разных областей сосуда имеет вид:

$$E_i(t) = E_0(1 + e_d d_i(t)), \quad (5)$$

где  $E_0, e_d$  – феноменологические параметры. Толщина стенки сосуда также зависит от диаметра сосуда и задается очевидной формулой

$$h_i(t) = h_0 \left( \frac{d_i}{d_{0i}} \right)^2, \quad (6)$$

где  $h_0$  – феноменологический параметр. Зависимость от частоты  $f$  скорости распространения пульсовой волны в кровеносном сосуде возьмем в виде:

$$V_i(f) = V_{i0}(1 + \gamma_1 f + \gamma_2 f^2), \quad (7)$$

где  $V_{i0}$  определяются формулой (1),  $\gamma_1, \gamma_2$  – феноменологические параметры. Зависимость от частоты коэффициента отражения от границ манжетки (по аналогии с отражением акустических волн от границы раздела и топографической неоднородности), считая плотность сосуда  $\rho$  одинаковой во всех областях, примем в виде:

$$R(f) = \frac{V_i - V_j}{V_i + V_j} + C_1 \frac{d_i - d_j}{V_{i0}} f, \quad (8)$$

где  $V_i, V_j$  – скорости пульсовой волны,  $d_i, d_j$  – диаметры сосуда в разных областях,  $C_1$  – феноменологический параметр.

Полный интерференционный сигнал будем определять путем сложения (точнее, интегрирования) всех частотных составляющих пульсовой волны, прошедших первую границу

манжетки и через интервал времени  $\tau/2 = L_m/2V_2$  принятый в середине манжетки с учетом затухания частотных составляющих, пропорционального квадрату частоты

$$M_1(t) = 2\sqrt{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{1 - R_1(f)^2} S_p(f) \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) e^{-\alpha 2\pi f^2 / V_2 \cdot L_m / 2} df, \quad (9)$$

где  $R_1(f)$  – коэффициент отражения от первой границы манжетки,  $\alpha$  – коэффициент затухания (феноменологический параметр), и частотных составляющих, отраженных от второй границы манжетки и принятых через интервал времени  $3\tau/2$ :

$$M_2(t) = 2\sqrt{2\pi} \int_0^\infty R_2(f) \sqrt{1 - R_1(f)^2} S_p(f) \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{3}{2}\right)\right) e^{-\alpha 2\pi f^2 / V_2 \cdot L_m / 2} df, \quad (10)$$

где  $R_2(f)$  – коэффициент отражения от второй границы.

Таким образом, полный интерференционный сигнал, принятый датчиком в середине манжетки, определяется суммой

$$M(t) = M_1(t) + M_2(t) \quad (11)$$

и зависит от модельных параметров  $k_i, f_{\text{vib}}, e_d, \gamma_1, \gamma_2, C_1, C_2, \alpha$ , от материальных ( $\rho_i, E_0$ ) и геометрических ( $d_{i0}, h_0$ ) параметров, являющихся феноменологическими и определяющими скорости и затухание пульсовой волны в различных частях сосуда в области манжетки.

Указанные 17 феноменологических параметров определяются методом наименьших квадратов при минимизации целевой функции

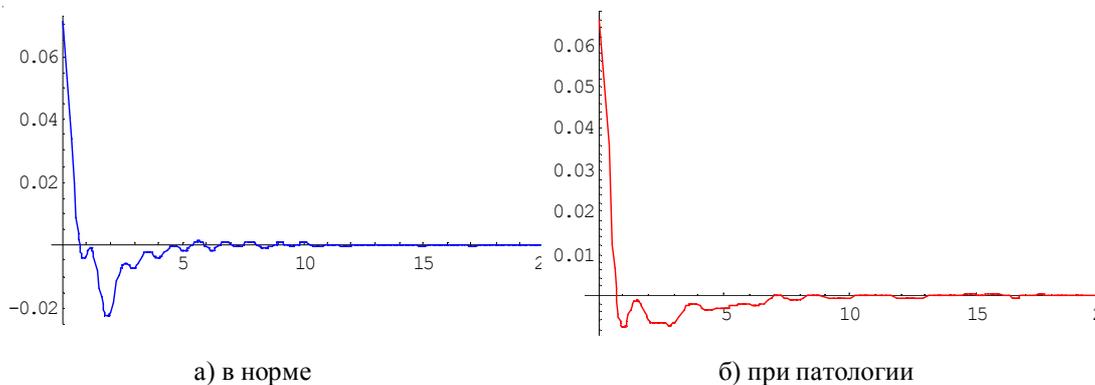


Рис. 2. Спектр пульсовой волны

$F_c$  в виде суммы квадратов отклонений расчетной ( $M(t)$ ) и экспериментальной ( $P(t)$ ) характеристик:

$$F_c = \sum_{k=1}^N (M(t) - P(t))^2 \quad (12)$$

На рисунке 3 представлены графики давления пульсовой волны в норме (зеленая кривая), при патологии сосудов (синяя кривая) и модельная кривая (красная), полученная при рассмотрении падения нормальной пульсовой волны на участок сосуда с манжеткой.

Целью расчета являлось определение параметров сосуда, при которых форма пульсовой волны становится близкой к патологической.

Представленная на рисунке 3 расчетная кривая соответствует следующим значениям параметров:

$$\begin{aligned} E_0 &= 26659 \text{ (Па/м}^2\text{)}, e_d = -14.3, \\ d_{10} &= 6.7 \text{ мм}, d_{20} = 1.1 \text{ мм}, d_{30} = 4.8 \text{ мм}, f_{vib} = \\ &= 14.28 \text{ Гц}, \\ k_1 &= 4.98, k_2 = 6.55, k_3 = 0.07, k_{vib} = 0.08, \\ h_0 &= 0.18 \text{ мм}, \rho = 1150 \text{ (кг/м}^3\text{)}, \\ C_1 &= 48, C_2 = -919, \gamma_1 = 0.047, \gamma_2 = 0.013, \\ \alpha &= 0.0039. \end{aligned}$$

Полученные результаты свидетельствуют о существенно нелинейном по давлению характере трансформации пульсовой волны в области манжетки. Обращает на себя внимание также обнаруженный эффект уменьшения модуля упругости при увеличении диаметра сосуда, о чем свидетельствует отрицательное значение коэффициента  $e_d$ .

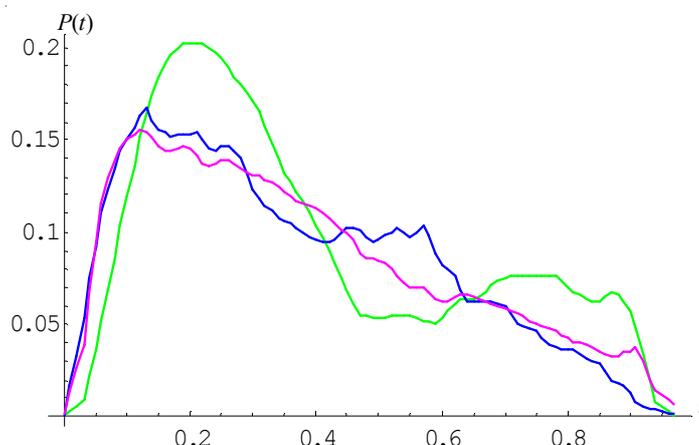


Рис. 3. Сравнение формы импульсов пульсовых волн в норме (зеленая), при патологии (синяя) и расчетной (красная)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астраханцева, Е. В. Математическое моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов / Е. В. Астраханцева, В. Ю. Гидастов, Д. Л. Ревизников // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, № 8. – С. 61–80.
2. Доль, А. В. Математические модели движения крови в системе сосудов с упругими стенками / А. В. Доль, Ю. П. Гуляев, Д. В. Иванов // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 9–1. – С. 79–84.
3. Механика кровообращения / К. Каро [и др.]. – М.: Мир, 1981. – 600 с.
4. Педли, Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов: пер. с англ. / Т. Педли. – М.: Мир, 1983. – 400 с.

## REFERENCES

1. Astrahanceva E.V., Gidastov V.Yu., Reviznikov D.L. Matematicheskoe modelirovanie gemodinamiki krupnykh krovenosnykh sosudov [Mathematical Modeling of Hemodynamics of Large Blood Vessels]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2005, vol. 17, no. 8, pp. 61-80.
2. Dol' A.V., Gulyaev Yu.P., Ivanov D.V. Matematicheskie modeli dvizheniya krovi v sisteme sosudov s uprugimi stenkami [Mathematical Models of Blood Flow in a System of Vessels with Elastic Walls]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya*, 2014, no. 9-1, pp. 79-84.
3. Karo K., Pedli T., Shroter R., Sid U. *Mekhanika krovoobrashcheniya* [Mechanics of Blood Circulation]. Moscow, Mir Publ., 1981. 600 p.
4. Pedli T. *Gidrodinamika krupnykh krovenosnykh sosudov: per. s angl.* [Hydrodynamics of Large Blood Vessels]. Moscow, Mir Publ., 1983. 400 p.

**DETERMINATION OF BLOOD VESSEL PARAMETERS  
BY PULSE WAVE**

**Sergey G. Suchkov**

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Researcher,  
Director of the Scientific and Technological Center “Micro- and Nanoelectronics”,  
Saratov National Research State University  
suchkov.s.g@mail.ru  
Astrakhanskaya St, 83, 410012 Saratov, Russian Federation

**Dmitry S. Suchkov**

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Deputy Director,  
Research Institute of Mechanics and Physics,  
Saratov National Research State University  
suchkovds@ya.ru  
Astrakhanskaya St, 83, 410012 Saratov, Russian Federation

**Svetlana M. Suchkova**

Engineer, LLC “Conversion-SSU”  
svetlana.m.suchkova@ya.ru  
Moskovskaya St, 66, 410012 Saratov, Russian Federation

**Abstract.** A pulse wave is a complex joint motion of blood and vessel walls described by a nonlinear system of differential equations of hydrodynamics and elasticity theory with a mobile boundary. Even an approximate solution to such a problem is currently not possible without significant simplifications, reducing the problem to almost uninteresting cases. Therefore, to mathematically describe the practically important changes in the pulse wave between the norm and pathology and to identify the main physical parameters that characterize the pathology, it is necessary to build a phenomenological model, the parameters of which are determined from comparison with the experiment. The results obtained indicate that the pulse wave transformation in the cuff area is significantly nonlinear in pressure. Attention is also drawn to the effect of a decrease in the elastic modulus with an increase in the diameter of the vessel.

**Key words:** pulse wave, phenomenological model, blood vessels, hydrodynamic equations, mathematical modeling.