УДК 539.3
ББК 31.232.308

МОДИФИКАЦИЯ ПОДХОДА К ОЦЕНКЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАГРУЗКИ ДЛЯ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СОСУДА

Жданова Наталья Николаевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики
Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Волгоградский филиал
pro-sv28@yandex.ru
ул. им. милиционера Буханцева, д. 48, 400120 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье предложен модифицированный подход к построению решения задачи упругости для сферического композита, состоящего из произвольного количества слоев, который позволяет оценить соотношение параметров всей конструкции в момент начала пластического течения.

Ключевые слова: условия сопряжения, граница слоев, модификация метода прогонки, трехдиагональная система линейных алгебраических уравнений, начало пластического течения.

С появлением мощной компьютерной техники проблему поиска структуры осесимметричного сферического композита и построения напряженно-деформированного состояния (далее – НДС) данной конструкции можно было бы решить полным перебором всех параметров конструкции. Однако компьютерный поиск структуры и построение его НДС наталкивается на достаточно серьезные трудности. Известно, что в последние годы разработано большое количество баз данных, содержащих наиболее полные сведения о структуре и свойствах (куда входят в том числе и механические, и тепловые, и другие свойства) самых разнообразных материалов, из которых можно создавать новые слоистые композиты. А также известно, что с увеличением количества слоев, из которых может быть спроектирована предварительная структура композита, сложность численного решения задачи об НДС конструкции растет даже не в геометрической прогрессии, а экспоненциально, то есть задача переходит в разряд трудно-решаемых, для которых установлено [3; 5], что самый быстродействующий современный компьютер выполняет такие задания годами.

В данной работе предложен один из вариантов такого построения решения об упругом деформировании многослойного сферического композита, который позволяет избежать долгих и громоздких компьютерных вычислений для оценки в первом приближении количества слоев, параметров нагрузки, свойств, размеров, материалов слоев как при упругом деформировании всей конструкции, так и в момент начала пластического течения.

Анализ НДС рассматриваемого композита будем проводить в предположении однородности и изотропности материалов слоев без учета температурных напряжений и натягов.

Основные соотношения для решения задачи НДС одного i-го слоя таковы:

© Жданова Н.Н., 2014

– закон Гука для одного (i-го) слоя сферического сосуда:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \beta_1\sigma_r + 2 \cdot \beta_2\sigma_\varphi ,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = \beta_2\sigma_r + \beta_3\sigma_\varphi , \qquad (1)$$

где $\beta_1 = 1 / E_i$; $\beta_2 = -(\nu_i / E_i)$; $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$; u – перемещение; E_i = const – модуль Юнга i-го слоя, n_i = const – коэффициент Пуассона i-го слоя;

– уравнение неразрывности деформаций для i-го слоя таково:

$$r\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} + \varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = 0; \qquad (2)$$

– уравнение равновесия для одного (i-го) слоя сферического сосуда:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\cdot(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 . \qquad (3)$$

Граничные условия для i-го слоя таковы:

$$\sigma_r(r = r_i) = p_i ; \; \sigma_r(r = r_{i+1}) = p_{i+1}, \qquad (4)$$

где r_i – внутренний, а r_{i+1} – внешний радиусы одного i-го слоя.

Удовлетворим уравнение равновесия (3), введя функцию напряжения F_i для i-го слоя:

$$\sigma_r = F_i / r^2 ; \; \sigma_\varphi = \frac{dF_i}{2\cdot r\cdot dr} \; \sigma_z = \sigma_\varphi . \qquad (5)$$

Подставив эти соотношения в уравнения (1), а затем в (2) получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функции напряжения, решив которое получаем:

$$F_i = A^i \cdot (L_1 + L_2) \cdot r^2 - B^i \cdot (2 \cdot L_1 - L_2) / r ,$$

перемещение для i-го слоя

$$u_i = A^i \cdot r + B^i / r^2 ,$$

где: $L_1 = E_i \cdot (1 - \nu_i) / (1 - \nu_i - 2 \cdot \nu_i^2)$,

$L_2 = 2 \cdot E_i \cdot \nu_i / (1 - \nu_i - 2 \cdot \nu_i^2)$,

$A^i = (r_{i+1}{}^3 \cdot p_{i+1} - r_i^3 \cdot p_i) / [(r_{i+1}{}^3 - r_i^3) \cdot (L_1 + L_2)]$,

$B^i = (r_i \cdot r_{i+1})^3 \cdot (p_{i+1} - p_i) / [(r_{i+1}{}^3 - r_i^3) \cdot (2 \cdot L_1 + L_2)]$.

И из соотношений (5) можно найти соответствующие напряжения.

Если теперь рассмотреть многослойную сферическую конструкцию, состоящую из произвольного N количества слоев, и считать, что слои посажены плотно, но без натягов, то условие сопряжения на границе i-го и i+1-го слоев можно записать так: $u_i(r_{i+1}) = u_{i+1}(r_{i+1})$. Учитывая еще силовые граничные условия для всей многослойной конструкции, то есть на внутренней поверхности имеется равномерное давление p_1, а на внешней – равномерное давление p_{N+1}, получим, рассматривая условия сопряжения для всех границ слоев сферического композита, трехдиагональную систему $N - 1$ линейных алгебраических уравнений относительно $N - 1$ неизвестных реактивных давлений $p_i = x_i$, $i = 2, 3, \dots , N$, $n = N$:

$$\begin{cases} x_2 + d_{21} x_3 = d_{11} \\ d_{12}x_2 + x_3 + d_{22}x_4 = 0 \\ d_{13}x_3 + x_4 + d_{23}x_5 = 0 \\ d_{14}x_4 + x_5 + d_{24}x_6 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ d_{1n-2}x_{n-2} + x_{n-1} + d_{2n-2}x_n = 0 \\ d_{1n-1}x_{n-1} + x_n = d_{2n-1} \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь введены обозначения:

$$d_{11} = \frac{I_{11}}{I_{11} + I_{21} + \delta_1} p_1 ;$$

$$d_{2n-1} = -\frac{I_{2N=1}}{I_{1N-1} + I_{2N-1} + \delta_{N-1}} \cdot p_{N+1} ;$$

$$d_{1i} = -\frac{I_{1i}}{I_{1i} + I_{2i} + \delta_i} ;$$

$$d_{2i} = -\frac{I_{2i}}{I_{1i} + I_{2i} + \delta_i} ;$$

значения p_1 и p_{N+1} – это внешнее p_{N+1} и внутреннее p_1 равномерные давления для всей конструкции,

$$I_{1i} = 3 \cdot r_i^3 \cdot (r_{i+2}{}^3 - r_{i+1}{}^3) \cdot L_1{}^i \cdot (2 \cdot L_1{}^{i+1} - L_2{}^{i+1}) \times \times (L_1{}^{i+1} + L_2{}^{i+1}),$$

$$I_{2i} = 3 \cdot r_{i+2}{}^3 \cdot (r_{i+1}{}^3 - r_i^3) \cdot L_1{}^{i+1} (2 \cdot L_1{}^i - L_2{}^i) \times \times (L_1{}^i + L_2{}^i),$$

$$\delta_i = (r_{i+2}{}^3 - r_{i+1}{}^3) \cdot (r_{i+1}{}^3 - r_i^3) \cdot (2 \cdot L_1{}^i - L_2{}^i) \times$$
$$\times (L_1{}^{i+1} - L_2{}^{i+1}) \cdot (L_1{}^{i+1} + L_2{}^{i+1} - L_1{}^i - L_2{}^i).$$

Если предположить, что $L_1{}^{i+1} + L_2{}^{i+1} - L_1{}^i - L_2{}^i = 0$ для всех слоев, то в соотношениях для d_{1i} и d_{2i} величина δ_i обращается в ноль и модификация метода прогонки [2] с учетом особенности структуры данной системы уравнений (6) дает следующие соотношения для неизвестных значений p_i:

$$p_i = p_1 - \frac{Q_{i-2} \cdot \prod_{n=i-1}^{N-1} I_{2n}}{Q_{N-1}} \cdot (p_1 - p_{N+1}),$$

где $Q_k = \sum_{i=1}^{k+1} \prod_{n=i}^{k} I_{2n} \cdot \prod_{n=1}^{i-1} I_{1n}$; $Q_0 = 1$; $Q_1 = I_{11} + I_{21}$, где $k = 2, 3, \dots, N-1$,

и разность значений $p_i - p_{i+1}$, которая участвует при построении решения для функции напряжений F_i, а также для напряжений σ_{ri} и $\sigma_{\varphi i}$ (5) каждого слоя приобретает достаточно простой вид:

$$p_i - p_{i+1} = \frac{\cdot \prod_{n=1}^{i-1} I_{1n} \cdot \prod_{n=i}^{N-1} I_{2n}}{Q_{N-1}} \cdot (p_1 - p_{N+1}). \quad (7)$$

Воспользуемся теперь условием пластичности Треска, которое для i-го слоя рассматриваемой конструкции приобретает вид:

$$|\sigma_{r_i} - \sigma_{\varphi_i}| = 3 \cdot B^i \, |2 \cdot L_1 - L_2| \, / \, (2 \cdot r^3) = \sigma_{T_i}, \quad (8)$$

где σ_{T_i} – предел текучести материала i-го слоя.

С учетом этого, чтобы иметь возможность оценить экстремальные параметры внешней нагрузки конструкции, механических свойств слоев и т. п., то есть те параметры, изменение которых повлечет за собой пластическое течение рассматриваемого композита, используем условие равнопрочности, введенное в работе [4], применяя его здесь как условие того, что пластическое течение начнется с внутреннего радиуса и практически во всех слоях одновременно. Подставляя полученные соотношения (7) в условие пластичности Треска (8) при $r = r_i$ для i-го слоя и взяв отношение полученного условия пластичности Треска для i-го слоя к условию пластичности Треска при $r = r_{i+1}$ для i+1-го слоя, получаем соотношения, которые в первом приближении позволяют оценить устойчивость рассматриваемой конструкции к пластическому течению:

$$\frac{r_{i+1}{}^3}{r_i^3} = \frac{(1-\nu_i) \cdot \sigma_{T_i} \cdot E_{i+1}}{(1-\nu_{i+1}) \cdot \sigma_{T_i} \cdot E_i}$$

для всех $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахрачева, Ю. С. Оценка вязкости разрушения сталей по результатам контактного деформирования / Ю. С. Бахрачева // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 10, Инновационная деятельность. – 2012. – № 6. – С. 53–57.
2. Жданов, С. И. Применение средств вычислительной техники на этапе концептуального проектирования изделий и технологий / С. И. Жданов, И. С. Жданов, Н. Н. Жданова // Компьютерное и математическое моделирование в естественных и технических науках. – Тамбов, 2002. – Вып. 20. – С. 55–56.
3. Жданова, Н. Н. Инновационный подход к подбору структуры металлических композитов, работающих в условиях мощного дугового разряда / Н. Н. Жданова, И. С. Жданов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 10, Инновационная деятельность. – 2013. – № 1. – С. 69–72.
4. Немировский, Ю. В. Одномерная задача прочности и оптимального проектирования неоднородных многослойных сферических и цилиндрических сосудов и круглых дисков / Ю. В. Немировский, М. Л. Хейнлоо // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – Горький : Изд-во ГГУ, 1976. – Вып. 5. – С. 3–14.
5. Рейнгольд, Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М. : Мир, 1980. – 476 с.

REFERENCES

1. Bakhracheva Yu.S. Otsenka vyazkosti razrusheniya staley po rezultatam kontaktnogo deformirovaniya [Evaluation of Steels Viscosity Destruction According to the Results of Contact Deformation]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 10, Innovatsionnaya deyatelnost* [Science Journal of Volgograd State University. Technology and Innovations], 2012, no. 6, pp. 53-57.

2. Zhdanov S.I., Zhdanov I.S., Zhdanova N.N. Primenenie sredstv vychislitelnoy tekhniki na etape kontseptualnogo proektirovaniya izdeliy i tekhnologii [Application of Computer Technology at the Stage of Conceptual Design of Products and Technologies]. *Kompyuternoe i matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh i tekhnicheskikh naukakh*. Tambov, 2002, vol. 20, pp. 55-56.

3. Zhdanova N.N., Zhdanov I.S. Innovatsionnyy podkhod k podboru struktury metallicheskikh kompozitov, rabotayushchikh v usloviyakh moshchnogo dugovogo razryada [Innovative Approach to the Selection of Metallic Composites Structures, Functioning Under the Powerful Arc Charges]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 10, Innovatsionnaya deyatelnost* [Science Journal of Volgograd State University. Technology and Innovations], 2013, no. 1, pp. 69-72.

4. Nemirovskiy Yu.V., Kheynloo M.L. Odnomernaya zadacha prochnosti i optimalnogo proektirovaniya neodnorodnykh mnogosloynykh sfericheskikh i tsilindricheskikh sosudov i kruglykh diskov [One-Dimensional Problem of Durability and Optimal Design of Multilayer Inhomogeneous Spherical and Cylindrical Vessels and Circular Discs]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti*. Gorkiy, Izd-vo GGU, 1976, no. 5, pp. 56-61.

5. Reingold E.M., Nivergelt Yu., Deo N. *Kombinatornye algoritmy. Teoriya i Praktika* [Combinatorial Algorithms. Theory and Practice]. Moscow, Mir Publ., 1980. 476 p.

MODIFICATION OF APPROACH TO EXTREME PARAMETERS ASSESSMENT FOR LOAD STRATIFIED ELASTIC DEFORMATION OF SPHERICAL VESSEL

Zhdanova Natalya Nikolaevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics,
Moscow State University of Communication Means, Volgograd Branch
pro-sv28@yandex.ru
Bukhantseva St., 48, 400120 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The article suggests the modified approach to solving the problem of spherical composite elasticity consisting of selectable number of layers, which allows estimate the correlation between parameters of the whole structure at the beginning of plastic flow.

With the advent of the powerful computer equipment the problem of search of axisymmetric spherical composite structure and construction intense the deformed condition of this design could be solved by means of full search of all design parameters. However, computer search of structure and creation of its intense deformed state encounters rather serious difficulties. It is known that a large number of the databases containing the fullest data on structure and properties (including mechanical, both thermal, and other properties) the most various materials from which it is possible to create new layered composites is developed in recent years. And also it is known that with increase in quantity of layers from which the preliminary structure of a composite can be designed, complexity of the numerical solution of a task about intense the deformed condition of a design grows at all in a geometrical progression, and is exponential, that the task passes into the category hardly solved for which it is established that the most high-speed modern computer performs such tasks for years.

In this work one of options of such creation of the decision on elastic deformation of a multilayered spherical composite which allows avoid long and bulky computer calculations for an assessment as a first approximation quantity of layers, parameters of loading, properties, the sizes, materials of layers both at elastic deformation of all design, and at the time of the beginning of a plastic current is offered.

Key words: coupling condition, boundary of layers, modification of sweep method, tridiagonal system of linear algebraic equations, beginning of plastic flow.